

SUBJECT:

12
5

٢- إذا كان أحد جذور المعادلة المميزة حقيقياً ومكرر لمرتين

$$M_1 = M_2 = \dots = M_r$$

$$\varphi(D) = (D - M)^r \cdot \psi(D) \quad ; \quad \psi(M_1) \neq 0$$

فإن هذه المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة تكون من الشكل:

$$\varphi(D) \cdot y = 0$$

$$(D - M)^r \cdot \psi(D) \cdot y = 0$$

بأن $\psi(D) \cdot e^{M_1 x} = \psi(M_1) \cdot e^{M_1 x}$ عندئذ تكون المعادلة من الشكل:

$$\psi(M_1) \cdot (D - M_1)^r \cdot y = 0$$

$$e^{M_1 x} \cdot x \cdot e^{M_1 x} \cdot x^2 \cdot e^{M_1 x} \dots x^{r-1} \cdot e^{M_1 x}$$

وإن جذور المعادلة

$$(D - M_1)^r \cdot y = 0$$

كما وجدنا في حصة سابقة هي: $e^{M_1 x} \cdot x \cdot e^{M_1 x} \cdot x^2 \cdot e^{M_1 x} \dots x^{r-1} \cdot e^{M_1 x}$
وهذه الحالة يكون الحل العام من الشكل:

$$y_h = e^{M_1 x} (A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots + A_r x^{r-1}) +$$

$$A_{r+1} e^{M_2 x} + \dots + A_n e^{M_n x}$$

لتفرض أن $M_1 = \alpha + i\beta$ جذور المعادلة المميزة ومكرر لمرتين وبالتالى فإن $M_2 = \alpha - i\beta$ جذور المعادلة المميزة ومكرر أيضاً لمرتين فحينئذ تكون الحالة العامة هي:

$$y_h = e^{\alpha x} \left[(A_1 + A_2 x + \dots + A_r x^{r-1}) \cdot \cos \beta x + (A_{r+1} + A_{r+2} x + \dots + A_{2r} x^{r-1}) \cdot \sin \beta x \right]$$

SUBJECT:

$$+ A_{2L+1} e^{m_{2L+1}x} + \dots + A_n e^{m_n x}$$

1- $y' + 5y = 0$: أوجد الحل العام للمعادلة : أولى

$$M=5 \Rightarrow M+5=0$$

$$y_h = A \cdot e^{-5x}$$

5- $y'' - 2y' = 0$

$$M \cdot 2 = 0 \Rightarrow M = 2$$

$$y_h = A \cdot e^{2x}$$

6- أوجد حلول المعادلة : $y'' - 5y' + 4y = 0$

المعادلة المميزة هي

$$m^2 - 5m + 4 = 0$$

$$(m-1)(m-4) = 0$$

$$m_1 = 4 \quad \text{و} \quad m_2 = 1 \quad \text{أى.}$$

$$y_h = A_1 \cdot e^x + A_2 \cdot e^{4x}$$

7- أوجد الحل العام : $y'' + 5y' + 6y = 0$

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$(m+2)(m+3) = 0$$

$$m_1 = -3$$

$$m_2 = -2$$

$$y_h = A_1 \cdot e^{-2x} + A_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \quad \text{المعادلة المميزة}$$

$$(M-3)(M+1)=0$$

$$M_2 = 3$$

$$M_1 = -1$$

$$y_h = A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x}$$

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 4y = 0$$

$$M^2 - 4 = 0$$

المعادلة المميزة هي

$$(M-2)(M+2)=0$$

$$M_2 = -2$$

$$M_1 = 2$$

$$y_h = C e^{2x} + D e^{-2x}$$

حيث C و D ثوابت كسبية.

$$y'' + 3y' = 0$$

$$M^2 + 3M = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة

المعادلة المميزة هي

$$M(M+3)=0$$

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = -3$$

$$y_h = A + B e^{-3x}$$

$$y'' + 9y = 0$$

$$M^2 + 9 = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة

$$M^2 = -9 \Rightarrow M^2 = 9i^2$$

$$M_1 = -3i, \quad M_2 = 3i$$

الحل العام هو: $A=3$

$$y_h = A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x$$

SUBJECT:

أوجد الحل العام للمعادلة: $y'' + 2y' + 2y = 0$

المعادلة المميزة هي

$$M^2 + 2M + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a \cdot c = 4 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4 = 4i^2$$

$$M_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$M_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

وبالتالي فإن الحل العام:

$$y_h = e^{-x} (A_1 \cos x + A_2 \sin x)$$

قاعدة اللوغاريتم

$$y_1 = e^{-x} \cdot \cos x \quad ; \quad y_2 = e^{-x} \sin x$$

مثال ٢: أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 3y' + 5y = 0$$

المعادلة المميزة هي

$$M^2 + 3M + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11 = 11i^2$$

$$M_1 = \frac{-3 + \sqrt{11}i}{2}$$

$$M_2 = \frac{-3 - \sqrt{11}i}{2}$$

الحل العام هو:

$$y_h = e^{-\frac{3}{2}x} (A_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + A_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x)$$

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$M^2 - 8M + 16 = 0$$

$$(M - 4)^2 = 0 \Rightarrow M_1 = M_2 = 4$$

الحل العام هو

$$y_h = e^{4x} (A_1 + A_2 x)$$

فأوجد الحل الخاص

$$y_1 = e^{4x}, y_2 = x \cdot e^{4x}$$

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$M^2 + 6M + 9 = 0$$

$$(M + 3)^2 = 0$$

$$M_1 = M_2 = -3$$

أعني أن الحل العام هو

$$y_h = e^{-3x} (B_1 + B_2 x)$$

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - y = 0$$

$$M^3 - 1 = 0$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 1$$

$$(M - 1)(M^2 + M + 1)$$

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = 1$$

$$M_3 = 1$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

$$M_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$M_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

المعادلة المعقدة

الحل

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

$$X^3 + \frac{b}{a}X^2 + \frac{c}{a}X + \frac{d}{a} = 0$$

$$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = 0$$

$$X^3 + (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3 = \frac{d}{a}$$

$$x_1, x_2, x_3 = \frac{d}{a}$$

$$M_1 = \sqrt[3]{\frac{M^3 + M + 1}{M^3 - 1}}$$

$$M^3 = M^3$$

$$M^3 = M^3$$

$$M^3 = M^3$$

$$M = 1$$

$$M = 1$$

الحل العام هو: $y_R = e^{-\frac{1}{2}x} [A_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x] + A_3 x$

٤. أوجد الحل العام للمعادلة: $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

الحل: المعادلة المميزة: $M^3 + 6M^2 + 12M + 8 = 0$

$M_1, M_2, M_3 = -\frac{b}{a} = -8 = -1.8$

$-1 + 8 = 7$
 $-2 + 4 = 2$
 $2 - 4 = -2$

أو $M = -2$

$(M+2)(M^2+4M+4)$

$(M+2)^3 = 0$

$M_1 = M_2 = M_3 = -2$

أي أن

$y_R = e^{-2x} (A_1 + A_2 x + A_3 x^2)$

٥. أوجد الحل العام للمعادلة: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

الحل: المعادلة المميزة: $M^3 - 6M^2 + 11M - 6 = 0$

$M_1, M_2, M_3 = -\frac{b}{a} = 6$

نلاحظ أن العدد (1) يحقق المعادلة لذلك هو جذر

$(M-1)(M^2-5M+6) = 0$

$(M-1)(M-2)(M-3) = 0$

$M_1 = 1 ; M_2 = 2 ; M_3 = 3$

$y_R = A_1 e^x + A_2 e^{2x} + A_3 e^{3x}$

$$\begin{array}{r} M^2 - 5M + 6 \\ M-1 \overline{) M^3 - 6M^2 + 11M - 6} \\ \underline{+ M^2 - 5M} \\ -5M^2 + 11M - 6 \\ \underline{+ 5M^2 - 5M} \\ 6M - 6 \\ \underline{- 6M + 6} \\ 0 \end{array}$$

1- إن الشكل العام لمعادلة من الدرجة الرابعة هو

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^4 = 0$$

لهذه المعادلة أربع جذور

يوجد هذه الجذور الأربعة - نفرض أن $x = 2 - \frac{a}{4}$

$$x^2 = 2^2 - \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{16}$$

$$x^3 = 2^3 - 3 \frac{a}{4} 2^2 + 3 \frac{a^2}{16} 2 - \frac{a^3}{64}$$

$$x^4 = 2^4 - 4x^3 \cdot \frac{a}{4} + 6x^2 \cdot \frac{a^2}{16} - 4x \cdot \frac{a^3}{64} + \frac{a^4}{256}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة:

$$2^4 + p 2^2 + q 2 + r = 0$$

أي جعلنا متباينة من الدرجة الرابعة أصبحت متباينة من الدرجة الثالثة x^3 وتسمى المتباينة الثالثة:

شكل المعادلة من الدرجة الثالثة الآتية:

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - 4r^2 = 0$$

ولهذه المعادلة ثلاثة جذور هي z_1, z_2, z_3

عندئذ

$$2z_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

$$2z_2 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$$2z_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$

$$2z_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + 5y = 0$$

المعادلة المعقدة:

$$M^4 + 4M^3 + 6M^2 + 4M + 5 = 0$$

$$M = z - 1$$

نفرض أن

$$M^2 = z^2 - 2z + 1$$

$$M^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$$

$$M^4 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1$$

نفوض في المعادلة

~~$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 + 4(z^3 - 3z^2 + 3z - 1) + 6(z^2 - 2z + 1) + 4z - 5 = 0$$~~

 ~~z^4~~

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1$$

$$+ 4z^3 - 12z^2 + 12z - 4$$

$$+ 6z^2 - 12z + 6$$

$$+ 4z - 5$$

$$+ 5$$

$$z^4 + 4 = 0$$

$$z^4 + pz^2 + rz + r = 0$$

$$p = 0, \quad r = 0, \quad r = 4$$

~~z^3~~

$$z^3 + 10 - 16z - 0 = 0$$

$$z^3 - 16z = 0$$

$$z(z^2 - 16) = 0$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 4, \quad z_3 = -4$$

$$2z_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = 0 + 2 + 2i \Rightarrow z_1 = 1 + i$$

نفوض في المعادلة:

$$M_1 = 1 + i - 1 = i$$

$$2z_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = 0 - 2 - 2i \Rightarrow z_2 = -1 - i$$

$$M_2 = -2 - i$$

$$2z_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = 0 + 2 - 2i \Rightarrow z_3 = 1 - i$$

$$M_3 = -i$$

SUBJECT: _____

$$2\lambda_4 = -\sqrt{3}i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 0 - 2 + 2i \Rightarrow \lambda_4 = -1 + i$$

$$\mu_4 = -2 + i$$

$$\mu_1 = i$$

$$\mu_2 = -i$$

$$\mu_3 = -2 + i$$

$$\mu_4 = -2 - i$$

$$y_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x + e^{-2x} (A_3 \cos x + A_4 \sin x)$$

المحلول الخاص

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = e^{-2x} \cos x + e^{-2x} \sin x$$